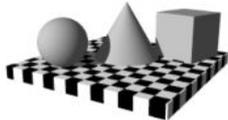


Computer Vision

Ausgleichsrechnung

- nach der Methode der kleinsten Quadrate -

02.06.2005

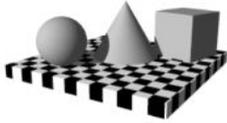


Problem

- Beispiel:
„Bestimmung der Parameter einer Gerade bei
gegebenen x und fehlerhaften y “

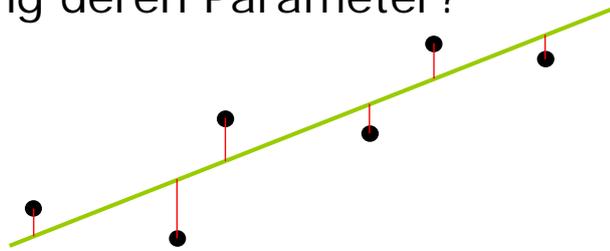
$$y = ax + b$$

- Beschreibung der Gerade durch a und b
- Problem: Beschaffung der Parameter a & b



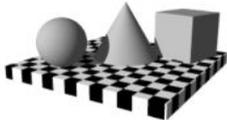
Ansatz

- Lösungsansatz
 - x gegeben, y gemessen
 - Wählen einer „mittleren Geraden“
 - Bestimmung deren Parameter?



- neue Geradengleichung für x und y

$$y_i + \underline{v_i} = ax_i + b$$



Ansatz

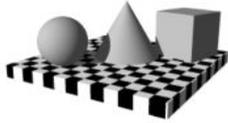
funktionales Modell

- „mittlere Gerade“
 - Gerade, die am besten passt
 - Abweichungen v sind minimal

$$\sum v^2 = \min$$

- daher *Methode der kleinsten Quadrate (MKQ)*
- Matrizenschreibweise

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min$$



Ansatz

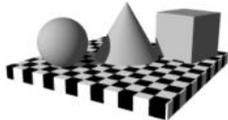
funktionales Modell

$$y + v = ax + b \quad \rightarrow \quad \mathbf{L} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Beobachtungs-
vektor Designmatrix Unbekannten-
vektor

- Achtung: Änderung der Bezeichnungen
x: Vektor der Unbekannten



Lösung

funktionales Modell

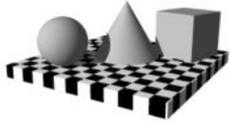
$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{v} &= (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L})^T (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}) \\ &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{L} - \mathbf{L}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}^T \mathbf{L} \\ &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2 \cdot \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{L} \end{aligned}$$

- Bestimmung des Minimums

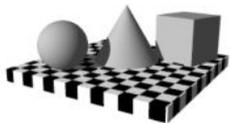
$$\frac{\partial (\mathbf{v}^T \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2 \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{L} = 0$$

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}}}$$



Lösung funktionales Modell

Beispielrechnung : Gerade



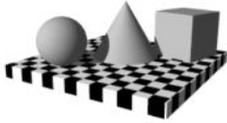
Ansatz stochastisches Modell

- Genauigkeitsaussagen für jede Beobachtung notwendig
- *Varianz*: beschreibt das mittlere Quadrat der Abweichungen der Beobachtungen vom „wahren“ Wert

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

- abgeleitet: *Standardabweichung*

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

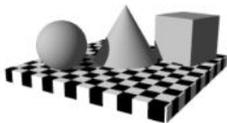


Ansatz

stochastisches Modell

$$\Sigma_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & & \rho_{2n}\sigma_1\sigma_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

- *Kovarianzmatrix*: vollständige Genauigkeitsaussage für einen Beobachtungsvektor \mathbf{L}
- *Hauptdiagonale*: Varianzen der Beobachtungen
- *Nebenelemente*: Korrelationen zwischen den Beobachtungen



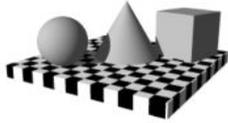
Ansatz

stochastisches Modell

- Genauigkeitsangaben nicht immer bekannt, aber Genauigkeitsrelationen

$$\Sigma_{ll} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{ll}$$

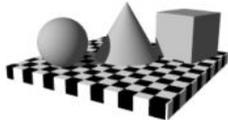
$$\mathbf{Q}_{ll} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & \frac{\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_0^2} & \cdots & \frac{\rho_{1n}\sigma_1\sigma_n}{\sigma_0^2} \\ \frac{\rho_{21}\sigma_2\sigma_1}{\sigma_0^2} & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} & & \frac{\rho_{2n}\sigma_1\sigma_n}{\sigma_0^2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\rho_{n1}\sigma_n\sigma_1}{\sigma_0^2} & \frac{\rho_{n2}\sigma_n\sigma_2}{\sigma_0^2} & \cdots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2} \end{bmatrix}$$



stochastisches Modell

- *Kofaktormatrix*: Genauigkeitsrelationen
- Unbekannte Varianz σ_0^2 wird als *Varianzfaktor* bezeichnet
- Für die Ausgleichung nach *MKQ* wird diese oft mit 1 angenommen

$$\mathbf{Q}_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & & \rho_{2n}\sigma_1\sigma_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

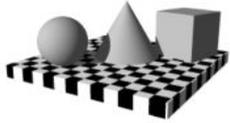


Erweiterung

- Erweiterung: unterschiedliche Gewichtung der Beobachtungen
Wann? → bei unterschiedlicher Genauigkeit der Beobachtungen
Beispiel: Bildkoordinaten an Bildrändern
- veränderte Ausgleichungsbedingung

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}_{ll}^{-1}$$

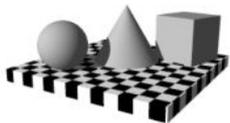
– Kofaktormatrix der Beobachtungen



Erweiterung : Gewichtung

- In den meisten Fällen, wird davon ausgegangen, dass die Beobachtungen unkorreliert sind

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$



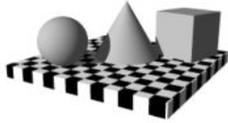
Erweiterung : Gewichtung

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} &= (\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}) \\ &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} - \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \\ &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2 \cdot \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{v}^T \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - 2 \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = 0$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \underline{(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}} \rightarrow \text{Gau\ss-Markow-Modell}$$



Lösung

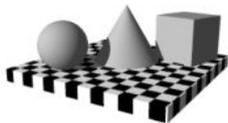
stochastisches Modell

- Kovarianzen der geschätzten Parameter?
– *Varianz-Fortpflanzungsgesetz (VFG)*
- Gegeben: Zufallsvektor \mathbf{X} und Abbildungsvorschrift:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b}$$

- *Varianz-Fortpflanzungsgesetz*
[Niemeier, 2002]

$$\Sigma_{YY} = \mathbf{A} \cdot \Sigma_{XX} \cdot \mathbf{A}^T$$



Lösung

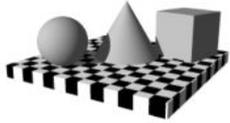
stochastisches Modell

- mit

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{L}\end{aligned}$$

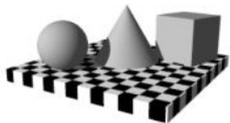
gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{xx} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_{ll} \cdot \mathbf{F} \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \underbrace{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_{ll}}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \\ &= \mathbf{N}^{-1} \quad \rightarrow \textit{Normalgleichungsmatrix}\end{aligned}$$



- Daraus ergibt sich für die Lösung des funktionalen Modells

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$$

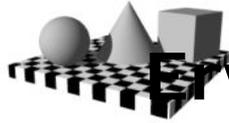


Zusammenfassung

- Linearer funktionaler Zusammenhang zwischen
 - gegebenen Größen (im Beispiel x)
 - gesuchten Parametern (im Beispiel a und b)
 - und den Beobachtungen (i.Bsp. y)

- „Beobachtungsgleichungen“

$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}$$

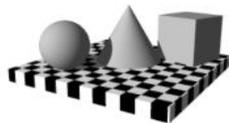


Erweiterung : Nichtlinearität

- Problem:
 - nicht-linearer funktionaler Zusammenhang
- Beispiel:
 - Bestimmung der Parameter eines Kreises

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos \phi \\ r \cdot \sin \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

- Linearisierung



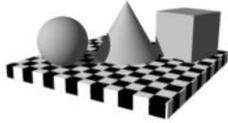
Linearisierung

- Erzeugen eines pseudo-linearen Zusammenhangs, durch Aufstellen einer Taylorreihe bis zur 1. Ordnung

$$\mathbf{F}(r, \phi, X, Y) = \mathbf{F}(r_0, \phi_0, X_0, Y_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} \right|_0 \cdot dr + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \phi} \right|_0 \cdot d\phi + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X} \right|_0 \cdot dX + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial Y} \right|_0 \cdot dY$$

- Ausgleichungsmodell

$$\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L} - \mathbf{F}_0 \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \phi_0^1 & -r \cdot \sin \phi_0^1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \sin \phi_0^1 & r \cdot \cos \phi_0^1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ \cos \phi_0^n & 0 & \dots & -r \cdot \sin \phi_0^n & 1 & 0 \\ \sin \phi_0^n & 0 & \dots & r \cdot \cos \phi_0^n & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} dr \\ d\phi^1 \\ \vdots \\ d\phi^n \\ dX \\ dY \end{bmatrix}$$

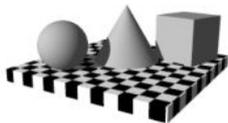


Linearisierung

- damit ergibt sich für die Parameterschätzung

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^0 + d\mathbf{x}$$

- Näherungswerte müssen bekannt sein
- Iterativer Prozess
- Allgemeines Ausgleichungsmodell
 - Beispiel: Kreis

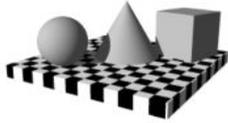


Allgemeines Modell

- bisheriges Modell: eindeutige Beobachtungsgleichung für jede *einzelne* Beobachtung
 - Erweiterung: in einer funktionalen Beziehung kommen gleichzeitig *mehrere* Beobachtungen und Unbekannte vor

$$(s_i \cos t_i - X)^2 + (s_i \sin t_i - Y)^2 - R^2 = 0$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{L}, \mathbf{x}) = 0$$



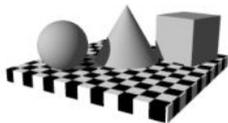
Allgemeines Modell

$$F(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{x}}) = F(\mathbf{L}, \mathbf{x}^0) + \frac{\partial F(\mathbf{L}, \mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{L}} \cdot \underbrace{(\hat{\mathbf{L}} - \mathbf{L})}_{\mathbf{v}} + \frac{\partial F(\mathbf{L}, \mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{x}^0} \cdot \underbrace{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0)}_{\hat{\mathbf{x}}} = 0$$

→ Nebenbedingung

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial F(\mathbf{L}, \mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial L_1} & \frac{\partial F_1}{\partial L_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial L_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial L_1} & \frac{\partial F_2}{\partial L_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial L_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_b}{\partial L_1} & \frac{\partial F_b}{\partial L_2} & \dots & \frac{\partial F_b}{\partial L_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \frac{\partial F(\mathbf{L}, \mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{x}^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1^0} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2^0} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n^0} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1^0} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2^0} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n^0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_b}{\partial x_1^0} & \frac{\partial F_b}{\partial x_2^0} & \dots & \frac{\partial F_b}{\partial x_n^0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = F(\mathbf{L}, \mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{L}, \mathbf{x}^0) \\ F_2(\mathbf{L}, \mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ F_b(\mathbf{L}, \mathbf{x}^0) \end{bmatrix}$$



Allgemeines Modell

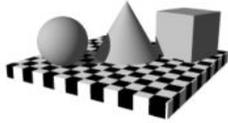
→ Zwei Bedingungen

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \Omega = \min \quad \text{und} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

- Lösen des Ausgleichungsproblems über die Verwendung der *Methode von Lagrange*
 - Das Optimum Ω einer Funktion f , die gleichzeitig die Nebenbedingungen φ erfüllen soll, kann gefunden werden, wenn gilt

$$\Omega = f + p_1 \varphi_1 + p_2 \varphi_2 + \dots + p_r \varphi_r$$

- *Korrelaten*: unbekannte Multiplikatoren p
- in der Geodäsie $2k$



Allgemeines Modell

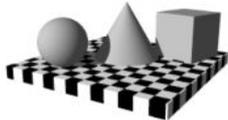
$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w})$$

- Lösung: 1. Ableitung nach \mathbf{v} und \mathbf{x}

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} = 2\mathbf{P}\mathbf{v} - 2\mathbf{B}^T \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$0 = \underbrace{\mathbf{Q}_{||} \mathbf{P}}_0 \mathbf{v} - \mathbf{Q}_{||} \mathbf{B}^T \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \underline{\underline{\mathbf{Q}_{||}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{k}}} \rightarrow \text{Korrelatengl.}$$



Allgemeines Modell

- 1. Ableitung nach \mathbf{x}

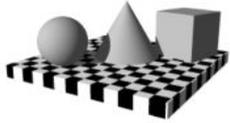
$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} = -2\mathbf{A}^T \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

- wird \mathbf{v} in die Bedingung φ eingesetzt...

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{||} \mathbf{B}^T \mathbf{k} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{w}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{k} = \mathbf{0}$$



Allgemeine Lösung

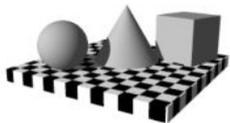
- in Matrizenform erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{BQ}_{ll}\mathbf{B}^T & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- die Lösung ergibt sich so mit

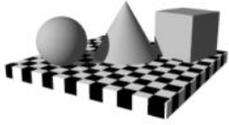
$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{BQ}_{ll}\mathbf{B}^T & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- *Gauß-Helmert-Modell*



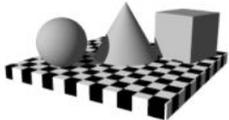
Beispiele

- Anwendungsbeispiel:
 - Kreis
 - Kalman-Filter
 - Bündelausgleichung für Bilddaten
 - Bündelausgleichung für verschiedene Quellen



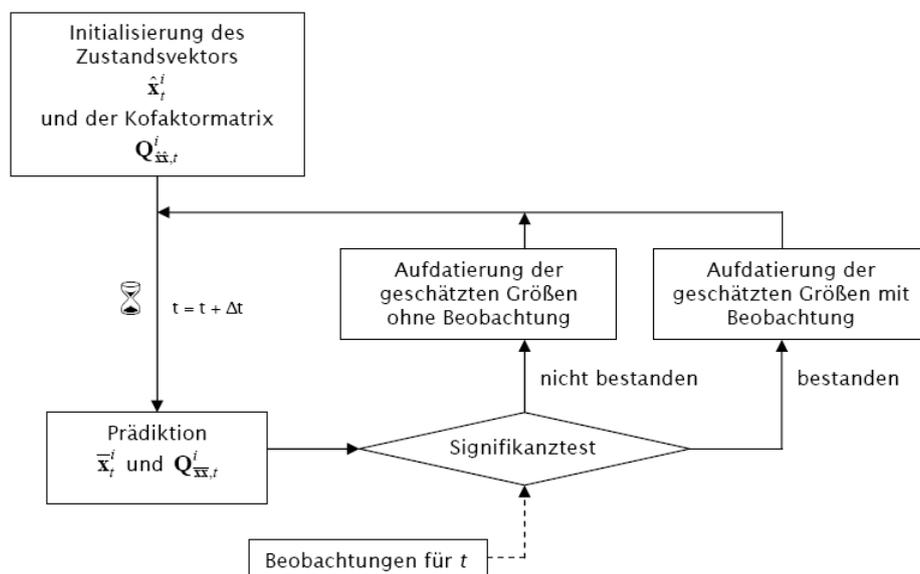
Beispiel

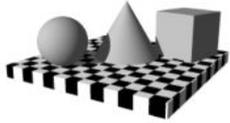
Beispielrechnung : Kreis



Kalman-Filter

- Zustandsschätzung über sequentielle Ausgleichung

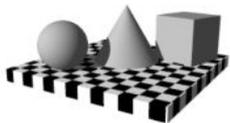




Kalman-Filter : Beispiel

- Zustand wird beschrieben durch
 - Position
 - Geschwindigkeit
 - Beschleunigung
- Initialisierung über zwei zeitlich aufeinander folgende Positionsmessungen

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k \\ (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_i) / \Delta t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$



Kalman-Filter : Beispiel

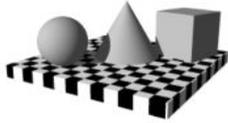
- Prädiktion anhand eines Bewegungsmodells \mathbf{T} :
 - hier Bewegungsgleichung

$$\bar{\mathbf{x}}_t^i = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{t-\Delta t}^i$$

- Abbildungsmodell: Zustand \rightarrow Beobachtung

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

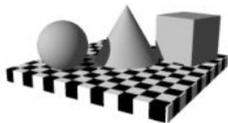


Kalman-Filter : Beispiel

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \\ \dot{\bar{X}}_i \\ \dot{\bar{Y}}_i \\ \dot{\bar{Z}}_i \\ \ddot{\bar{X}}_i \\ \ddot{\bar{Y}}_i \\ \ddot{\bar{Z}}_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t-\Delta t} + \dot{\mathbf{X}}_{t-\Delta t} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \ddot{\mathbf{X}}_{t-\Delta t} \cdot \Delta t^2$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 1/2 \cdot \Delta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 1/2 \cdot \Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 1/2 \cdot \Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Kalman-Filter : Beispiel

Ausgleichung

Verbesserungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}$$

Kofaktormatrix der Verbesserungen

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{A}^T$$

Kofaktormatrix der Unbekannten

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_{ll} \cdot \mathbf{F}$$

Kalman-Filter

Innovation

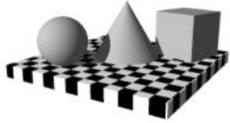
$$\mathbf{d}_{i,k} = \mathbf{L}_k - \bar{\mathbf{X}}_t^i$$

Kofaktormatrix der Innovation

$$\mathbf{D}^i = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx,t}^i\mathbf{A}^T$$

Kofaktormatrix des Zustandes

$$\mathbf{Q}_{xx,t}^i = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x},t}^i \cdot \mathbf{T}^T \quad \left[+\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_{ww} \cdot \mathbf{S}^T \right]$$



Kalman-Filter

- Signifikanztest

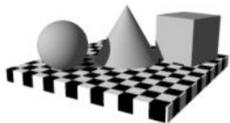
$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{d}_{i,k}^T \cdot \mathbf{D}_i^{-1} \cdot \mathbf{d}_{i,k} \leq \chi_{2,95\%}^2$$

- Bei Annahme

$$\hat{\mathbf{x}}_t^i = \bar{\mathbf{x}}_t^i + \mathbf{K}^i \cdot \mathbf{d}_{i,k} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}},t}^i = \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}},t}^i - \mathbf{K}^i \cdot \mathbf{D}^i \cdot \mathbf{K}_i^T$$
$$\mathbf{K}^i = \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}},t}^i \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{D}_i^{-1}$$

- Bei Ablehnung

$$\hat{\mathbf{x}}_t^i = \bar{\mathbf{x}}_t^i \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}},t}^i = \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}},t}^i$$



Zusammenfassung

- *Gauß-Markow-Modell*
 - Eindeutige Abbildung der Unbekannten auf *eine* Beobachtung
 - *Beobachtungsgleichungen*
- *Gauß-Helmert-Modell*
 - Impliziter Zusammenhang zwischen Beobachtungen und Unbekannten
 - *Bedingungsgleichungen*